THE MINERALOGICAL MAGAZINE

AND

JOURNAL OF

THE MINERALOGICAL SOCIETY.

No. 81. SEPTEMBER, 1915. Vol. XVII.

Formule générale donnant la biréfringence d'une lame cristalline en fonction des angles que sa normale fait avec les axes d'élasticité optique. La formule approximative habituelle s'obtient en y supposant les indices infinis, tout en conservant entre eux les différences finies qui existent en réalité.

Par G. Cesàro.

Président de l'Académie royale de Belgique, Professeur de Cristallographie et Minéralogie à l'Université de Liége.

[Read January 26, 1915.]

DANS les questions relatives aux biréfringences on emploie des formules approximatives, et je ne trouve relatée nulle part la formule donnant exactement la biréfringence d'une face en fonction des angles que sa normale fait avec les axes d'élasticité optique. Le but de cette note est d'indiquer cette formule, d'ailleurs très simple, et surtout de montrer que la formule approximative habituelle se déduit de la formule exacte en y supposant l'indice moyen infini.

On s'explique alors pourquoi, dans la plupart des questions relatives aux biréfringences, la grandeur réelle des indices importe peu : pourvu que l'indice moyen conserve les différences existant en réalité avec les indices extrêmes, sa valeur peut subir d'amples variations sans que le résultat varie d'une façon appréciable.[1]

Voici la propriété : '*Si l'on considère un ellipsoïde qui va en croissant, tout en conservant entre ses axes des différences finies constantes, la différence des axes de l'ellipse de section faite par un plan diamétral de direction constante tend vers une limite finie lorsque les axes de l'ellipsoïde augmentent au delà de toute limite.*

'*Pendant le mouvement de croissance, les normales aux sections cycliques vont en s'approchant du grand axe de l'ellipsoïde, mais tendent vers une position limite lorsque les axes de l'ellipsoïde tendent vers l'infini.*

'*Si n_g, n_m, n_p sont les axes de l'ellipsoïde, et*

$$\begin{aligned} n_g - n_m &= A \\ n_g - n_p &= B \\ n_m - n_p &= C \end{aligned}$$

leurs différences constantes, la position limite de la normale à une section cyclique fait avec le grand axe de l'ellipsoïde un angle V donné par

$$\mathrm{tg}^2 V = \frac{C}{A} \cdot \tag{1}$$

'*Pendant le mouvement, les normales aux sections cycliques font des angles variables avec la normale fixe de la section diamétrale considérée ; si l'on désigne par θ et θ' les valeurs limites de ces angles, c'est-à-dire les angles que la normale fixe fait avec les droites définies par* (1), *la différence entre les axes de la section diamétrale a pour limite*

$$X = B \sin\theta \sin\theta'.\text{'}$$

Optiquement, l'ellipsoïde est l'ellipsoïde inverse, ses axes n_g, n_m, n_p les indices principaux, leurs différences A, B, C les biréfringences principales, les normales aux sections cycliques les axes optiques, les axes d'une section diamétrale sont les indices relatifs à une direction de propagation normale à la lame, et la différence X entre ces axes est la différence entre ces indices, c'est-à-dire la biréfringence de la lame. Voici la démonstration de la propriété.

Marche des axes optiques[2] *pendant le mouvement de croissance de l'ellipsoïde.*

[1] Voir, par exemple : Bull. de l'Acad. royale de Belgique (Classe des Sciences), No. 7, Juillet 1908, p. 649, et aussi l'exemple de la biréfringence de la *calcite* déduite de la biréfringence de son clivage, traité à la fin de la présente note.

[2] J'emploie le langage optique ou le langage géométrique suivant que l'un ou l'autre est plus concis ou plus clair.

Si V est l'angle *variable* que fait la normale à une section cyclique avec le grand axe de l'ellipsoïde, on a

$$\operatorname{tg} V = \frac{n_g}{n_p} \sqrt{\frac{n^2_m - n^2_p}{n^2_g - n^2_m}}, \tag{2}$$

ou, en désignant par x l'indice moyen n_m,

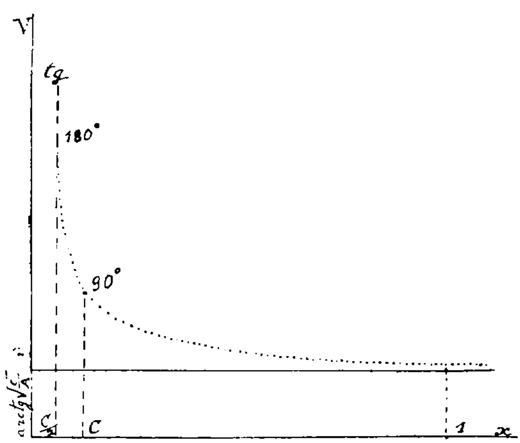
$$V = \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot \frac{x+A}{x-C} \cdot \sqrt{\frac{2x-C}{2x+A}} \right\}.$$

La dérivée

$$V' = -\sqrt{AC} \cdot \frac{3x + A - C}{x(2x+A-C)\sqrt{(2x+A)(2x-C)}}$$

est essentiellement négative, car A et C sont de l'ordre des millièmes et x est plus grand que l'unité[1]; donc V décroît constamment lorsque x augmente, et la normale à la section cyclique va en se rapprochant, d'une manière continue, du grand axe de l'ellipsoïde. Pour $x = \infty$,

$$V = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot$$



La figure représente schématiquement la variation de V avec l'indice moyen. Dans la partie optiquement utile, la branche devient presque

[1] Cette restriction est même inutile, car, vu que $n_g > n_m > n_p$, A et C sont des nombres positifs; or, pour que V soit réel, il faut que $2x > C$; on a donc aussi $3x > C$, etc.

parallèle à l'axe des x ; ainsi, par exemple, pour le *péridot* pour lequel

$$n_g = 1,697 \qquad n_m = 1,678 \qquad n_p = 1,661 \text{ (Des Cloizeaux)}$$

et, par conséquent,

$$A = 19 \text{ millièmes}, \qquad C = 17 \text{ millièmes},$$

on a

x	1,017[1]	1,6	1,678	1,7	10	∞
V	44° 10′	43° 53′,5	43° 52′	43° 51′,5	43° 29′	43° 24′ 27″,5 [2]

Différence des axes d'une ellipse diamétrale découpée par un plan dont la normale fait avec les axes de l'ellipsoïde des angles α, β, γ ($u = \cos\alpha$, $v = \cos\beta$, $w = \cos\gamma$). — On suppose l'axe x dirigé suivant n_p, y suivant n_m, z suivant n_g. —

Si sur le diamètre normal à chaque section diamétrale on porte des longueurs égales aux inverses $\frac{1}{n}$ des axes de la section, le lieu des extrémités est une surface à deux nappes,[3] ayant pour équation polaire

$$\frac{u^2 n^2_p}{n^2 - n^2_p} + \frac{v^2 n^2_m}{n^2 - n^2_m} + \frac{w^2 n^2_g}{n^2 - n^2_g} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned}(u^2 n^2_p + v^2 n^2_m + w^2 n^2_g)\, n^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3)\\ - (n^2_g n^2_m \sin^2\alpha + n^2_g n^2_p \sin^2\beta + n^2_p n^2_m \sin^2\gamma)\, n^2 + n^2_p n^2_m n^2_g = 0\end{aligned}$$

et, pour abréger,

$$Mn^4 - Nn^2 + P = 0.$$

La résolution de cette équation donnerait les valeurs n' et n'' des axes de l'ellipse de section,[4] indices de réfraction du rayon normal à la section considérée, axes dont la différence est la biréfringence de la section

$$X = n' - n''.$$

On a

$$X^2 = n'^2 + n''^2 - 2n'n'' = \frac{N}{M} - 2\sqrt{\frac{P}{M}} = \frac{N - 2\sqrt{MP}}{M}, \qquad (4)$$

[1] C'est la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à x, car elle correspond à $n_p = 1$.

[2] On voit que lorsque x varie depuis 1,017 jusqu'à ∞, V ne varie que d'environ 0° 46′ ; on peut donc donner à l'indice moyen, dans la formule (2), des valeurs grossièrement approchées, telles que 1,6 et 1,7, pour obtenir V à une minute près.

[3] Appelée *surface des vitesses normales*, le rayon vecteur, inverse de l'indice, représentant la vitesse de propagation normale.

[4] J'ai donné une solution géométrique de ce problème dans les Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége, 1898, 2e série, t. xx, pp. 6 et 7.

et, en remplaçant M, N, P par leurs valeurs, $X^2 =$

$$\frac{n^2_g n^2_m \sin^2\alpha + n^2_g n^2_p \sin^2\beta + n^2_m n^2_p \sin^2\gamma - 2 n_g n_m n_p \sqrt{n^2_p \cos^2\alpha + n^2_m \cos^2\beta + n^2_g \cos^2\gamma}}{n^2_p \cos^2\alpha + n^2_m \cos^2\beta + n^2_g \cos^2\gamma} \qquad (5)$$

Telle est la formule donnant exactement, de la façon la plus générale, la biréfringence d'une face en fonction des indices principaux et des angles que la normale à la face fait avec les axes d'élasticité optique.

On vérifie facilement cette formule dans les cas particuliers : section normale à un axe d'élasticité, ou passant par un axe d'élasticité optique; en égalant le numérateur à zéro, on retombe, après calculs, sur la normale à une section cyclique, etc.

Limite vers laquelle tend X lorsque l'indice moyen tend vers l'infini, en laissant les biréfringences constantes. —

Si l'on désigne l'indice moyen par x, on a

$$n_g = x + A$$
$$n_m = x$$
$$n_p = x - C;$$

lorsque x tend vers ∞,

$$\lim. \frac{n_g}{x} = \lim. \frac{n_p}{x} = 1,$$

de sorte que, si l'on prend x pour l'infiniment grand principal, n_g et n_p sont des infinis du premier ordre. Quant aux coefficients

$$M = \Sigma\, n^2_p \cos^2\alpha,\ N = \Sigma\, n^2_g n^2_m \sin^2\alpha,\ P = n^2_g n^2_m n^2_p,$$

ils sont respectivement de l'ordre *deux*, *quatre* et *six*, vu que

$$\lim. \frac{M}{x^2} = 1,\ \lim. \frac{N}{x^4} = 2,\ \lim. \frac{P}{x^6} = 1.$$

Il s'ensuit que les formules (5) et (4) deviennent indéterminées lorsqu'on y fait $n_m = \infty$, car le dénominateur est un infini du second ordre et le numérateur est la différence de deux infinis du quatrième ordre, différence qui pourrait être du quatrième ordre,[1] mais qui est ici d'un ordre inférieur, vu que son rapport à x^4 tend vers zéro ; suivant l'ordre de cette différence, X^2 augmentera indéfiniment avec x, tendra vers une quantité finie positive, ou vers zéro.[2] Pour faire disparaître l'indétermination, on écrit

$$X^2 = \frac{N^2 - 4\,MP}{M(N + 2\sqrt{MP})}, \qquad (6)$$

[1] Dans ce cas, X augmenterait indéfiniment avec x.

[2] On ne réussit pas mieux en divisant les deux termes de l'expression (5) par n^4_m : l'indétermination apparaît alors sous la forme $\frac{0}{0}$.

puis

$$\begin{aligned} N^2-4\,MP &= \{(n^2{}_g-n^2{}_m)\,n^2{}_p\,w^2-(n^2{}_m-n^2{}_p)\,n^2{}_g\,u^2+\underline{n^2{}_m\,(n^2{}_p+n^2{}_g)}\}^2 \\ &\quad -\underline{4\,n^2{}_g\,n^2{}_m\,n^2{}_p}\,\{(n^2{}_g-n^2{}_m)\,w^2-(n^2{}_m-n^2{}_p)\,u^2+\underline{n^2{}_m}\} \\ &= A^2\,(n_g+x)^2\,n^4{}_p\,w^4+C^2\,(n_p+x)^2\,n^4{}_g\,u^4+B^2\,x^4\,(n_g+n_p)^2 \\ &\quad -2\,AC\,(x+n_p)\,(x+n_g)\,n^2{}_p\,n^2{}_g\,u^2\,w^2 \\ &\quad -2\,AB\,(x+n_g)\,x^2\,n^2{}_p\,w^2\,(n_g+n_p) \\ &\quad -2\,BC\,(x+n_p)\,x^2\,n^2{}_g\,u^2\,(n_g+n_p). \end{aligned} \tag{7}$$

Par cette transformation,[1] à cause des facteurs constants A^2, C^2, B^2, etc., N^2-4MP a tous ses termes du sixième ordre et le dénominateur est du sixième ordre; en divisant haut et bas par x^6, et passant à la limite, on obtient 4 pour le dénominateur et, après simplification,

$$X^2{}_{\text{lim.}} = A^2\,w^4+C^2\,u^4+B^2-2\,ACu^2\,w^2-2\,ABw^2-2\,BCu^2. \tag{8}$$

Introduisons dans cette expression les angles θ et θ' que la direction u, v, w fait avec les normales aux sections cycliques limites, normales dont les cosinus directeurs sont respectivement[2]

$$\sqrt{\frac{C}{B}},\quad 0,\quad \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$-\sqrt{\frac{C}{B}},\quad 0,\quad \sqrt{\frac{A}{B}};$$

ces angles sont donnés par

$$\sqrt{B}\,.\cos\theta = w\,\sqrt{A}+u\,\sqrt{C},$$

$$\sqrt{B}\,.\cos\theta' = w\,\sqrt{A}-u\,\sqrt{C};$$

et, comme (8) peut s'écrire

$$\begin{aligned} X^2{}_{\text{lim.}} &= (Aw^2+Cu^2-B+2uw\,\sqrt{AC})\,(Aw^2+Cu^2-B-2uw\,\sqrt{AC}) \\ &= \{B-(w\,\sqrt{A}+u\,\sqrt{C})^2\}\,\{B-(w\,\sqrt{A}-u\,\sqrt{C})^2\}, \end{aligned} \tag{9}$$

on en conclut

$$X_{\text{lim.}} = B\sin\theta\sin\theta', \tag{10}$$

qui est la formule approximative habituelle.

Seconde expression exacte de la biréfringence.

L'expression (7) peut être décomposée en deux facteurs;[3] en opérant comme sur (8) et en tenant compte de (2), on obtient

$$\sqrt{N^2-4\,MP} = B\,(n_g+n_p)\,n^2{}_m\sin\theta\sin\theta'; \tag{11}$$

[1] La partie essentielle de cette transformation, qui change $n^2{}_g+n^2{}_p$ en $n^2{}_g-n^2{}_p$, est soulignée.

[2] D'après la formule (1).

[3] En ajoutant et retranchant $4AC(x+n_p)\,(x+n_g)\,n^2{}_p n^2{}_g u^2 w^2$, on obtient une

de sorte que (6) devient

$$X = \frac{B\,(n_g + n_p)\,n^2_m \sin\theta \sin\theta'}{\sqrt{\Sigma n^2_p \cos^2 a}\,\left(\Sigma n^2_m n^2_g \sin^2 a + 2 n_g n_m n_p \sqrt{\Sigma n^2_p \cos^2 a}\right)}. \quad (12)$$

Dans cette expression θ et θ' représentent des angles variables avec n_m, tandis que dans (10) θ et θ' sont les limites de ces angles lorsque l'indice moyen devient infini.

Formule à choisir pour le calcul numérique de la biréfringence exacte.

Je prendrai comme exemple une face du *péridot,* minéral donné par

$$n_g = 1{,}697, \quad n_m = 1{,}678, \quad n_p = 1{,}661\,;$$

la face est donnée par

$$a = 53^\circ\,54', \quad \beta = 59^\circ\,50'\,; \quad \text{d'où}: \gamma = 50^\circ\,44'\,58'',256.$$ [1]

On calcule

$$\Sigma n^2_p \cos^2 a = 2{,}8216496$$
$$\Sigma n^2_m n^2_g \sin^2 a = 15{,}8909546.$$

La formule (5) est impropre au calcul numérique parce qu'elle donne X^2, qui est de l'ordre des millionièmes, par la différence de deux nombres plus grands que l'unité ; or, les tables de logarithmes ne pouvant fournir qu'un certain nombre de figures, les chiffres deviennent incertains là où ils doivent être utilisés. Ainsi, en écrivant

$$X^2 = \frac{N}{M} - 2\sqrt{\frac{P}{M}},$$

on obtient :

$$\frac{N}{M} = 5{,}631796\underline{4}$$

$$2\sqrt{\frac{P}{M}} = 5{,}631471\underline{2}$$

$$X^2 = 0{,}0003252\,;$$

d'où

$$X = 18 \text{ millièmes.}$$

La formule (12) ne présente pas ces inconvénients, parce que les nombres presque égaux se trouvent au dénominateur à l'état de somme

différence de carrés. Si l'on continue la décomposition, on obtient une formule utilisable sous la forme approximative (9) n'exigeant pas le calcul de θ et θ' :

$$X^2_{\text{lim.}} = (\sqrt{B} + w\sqrt{A} + v\sqrt{C})\,(\sqrt{B} + w\sqrt{A} - u\sqrt{C})\,(\sqrt{B} - w\sqrt{A} + u\sqrt{C})\,(\sqrt{B} - w\sqrt{A} - u\sqrt{C}).$$

Dans le cas de la face du péridot traitée ci-après, on a :

$A = 19$, $B = 36$, $C = 17$, $w\sqrt{A} = 2{,}76$, $u\sqrt{C} = 2{,}43$, $\sqrt{B} = 6$

$X^2_{\text{lim.}} = 11{,}19 \,.\, 6{,}33 \,.\, 5{,}67 \,.\, 0{,}81 = 325{,}31$; d'où $X_{\text{lim.}} = 18$ millièmes.

[1] C'est la face $e_3 = 121$.

et que le numérateur est un petit nombre pouvant être précisé avec beaucoup d'approximation. Ainsi, dans notre cas, on obtient

$$\log. N = \bar{1},23278174$$
$$\log. D = 0,97633527$$
$$\log. X = \bar{2},25644647$$
$$X = 0,0180487$$

ou, en millièmes, $X_{\text{vraie}} = 18,0487.$

La presque égalité des quantités $\frac{N}{M}$ et $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, qui revient à la presque égalité de $\Sigma n^2{}_m n^2{}_g \sin^2 \alpha$ et $2\, n_g\, n_m\, n_p \sqrt{\Sigma n^2{}_p \cos^2 \alpha}$, suggère une simplification de la formule (12), qui peut s'écrire approximativement

$$X = \frac{B\,(n_g + n_p)\, n^2{}_m \sin\theta \sin\theta'}{\sqrt{2\,\Sigma n^2{}_p \cos^2\alpha\,.\,\Sigma n^2{}_g\, n^2{}_m \sin^2\alpha}}\,.$$

Dans notre cas, cette formule donne

$$X = 18,0485.$$

Les formules limites donnent :

$$V = 43^\circ\, 24'\, 27'',47, \quad \theta = 30^\circ\, 10'\, 10'',81, \quad \theta' = 86^\circ\, 51'\, 37'',63$$
$$X_{\text{lim.}} = 18,0651.$$

Voici un exemple dans lequel on passe de la biréfringence X mesurée dans une face d'orientation connue à la vraie biréfringence B ; je choisis un cas où la biréfringence est extrême, cas dans lequel la formule limite ne suffit pas, et où il faut donc connaître l'indice moyen pour l'emploi de la formule exacte ; or, on verra que la connaissance de l'indice avec un seul chiffre décimal suffit pour résoudre la question.

PROBLÈME. — *On a mesuré la biréfringence X dans une face oblique à l'axe d'un cristal optiquement uniaxe et négatif. En déduire la vraie biréfringence $B = n_g - n_p$.*

Le corps est la calcite ; la face est son clivage, dont la normale est inclinée sur l'axe optique sous un angle de 44° 37′. *La biréfringence mesurée est*

$$X = 93,6 \text{ millièmes ;}$$

on a obtenu pour l'indice ordinaire

$$1,6 < n_g < 1,7.$$

Ici l'ellipsoïde est de révolution autour de l'indice n_p dirigé suivant l'axe x. La formule relative aux uniaxes pourrait être obtenue en faisant dans (12) :

$$n_m = n_g, \qquad \theta = \theta' = a\,;$$

mais le calcul est assez long et il vaut mieux remonter à l'équation (3) : lorsque dans celle-ci on fait $n_m = n_g$, le premier membre devient divisible par $n^2 - n^2_g$ et l'on obtient pour la valeur du petit indice de la section

$$n = \frac{n_g n_p}{\sqrt{n^2_p \cos^2 a + n^2_g \sin^2 a}}, \tag{13}$$

puis

$$X = n_g - n = n_g\left(1 - \frac{n_p}{\sqrt{n^2_p \cos^2 a + n^2_g \sin^2 a}}\right).$$

Pour obtenir la formule inverse, on tire de (13)

$$n_p = \frac{n n_g \sin a}{\sqrt{n^2_g - n^2 \cos^2 a}}\,;$$

on a alors

$$B = n_g - n_p = n_g\left(1 - \frac{(n_g - X)\sin a}{\sqrt{n^2_g - (n_g - X)^2 \cos^2 a}}\right).$$

En remplaçant dans cette formule X par les valeurs mesurées et en y faisant $a = 44^\circ\ 37'$, on obtient la valeur de la biréfringence ; or,

pour $n = 1,6$ on trouve $B = 174,46$
„ $n = 1,7$ „ $B = 175,27$

et la vraie biréfringence de la *calcite* est $B = 175$.

La formule limite (10) devient ici

$$B = \frac{X}{\sin^2 a} = 189,74.$$

Voici différentes valeurs obtenues pour n_p et pour B, lorsque n_g croît depuis 1,5 jusqu'à ∞.

n_g	1,5	1,6	1,658	1,7
n_p	1,326447	1,425542	1,483063	1,524734
B	173,55	174,46	174,94	175,27
n_g	1,8	1,9	2	∞
n_p	1,624006	1,723349	1,822751	∞
B	175,99	176,65	177,25	189,74

Les nombres exacts pour la *calcite* sont

$$n_g = 1{,}658, \quad n_p = 1{,}483; \qquad \text{d'où } B = 175;$$

on en déduit, pour la biréfringence du clivage,

$$X = 93{,}6364;$$

nous avons pris 93,6 parce qu'une si haute biréfringence est déjà très difficile à obtenir pratiquement à un dixième près; ceci explique les légères divergences avec les nombres réels des valeurs de n_p et B, relatives à $n_g = 1{,}658$, que l'on observe dans le tableau qui précède.