Démonstration simple de la loi de Miller.

Par G. Cesàro,

Professeur de Cristallographie et Minéralogie à l'Université de Liége.

[Read January 18, 1916.]

Lemme. Dans tout triangle, l'arc x (fig. 1), qui mené du sommet partage la base en deux segments α et β, est donné par

$$\cos x \sin c = \cos a \sin \beta + \cos b \sin \alpha.$$

En effet :

$$\cos a = \cos x \cos \alpha + \sin x \,\underline{\sin \alpha} \cos \omega$$
$$\cos b = \cos x \cos \beta - \sin x \,\underline{\sin \beta} \cos \omega.$$

Pour éliminer ω, on multiplie la première équation par $\sin \beta$, la seconde par $\sin \alpha$, et l'on additionne :

$$\cos a \sin \beta + \cos b \sin \alpha = \cos x (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \cos x \sin c.$$

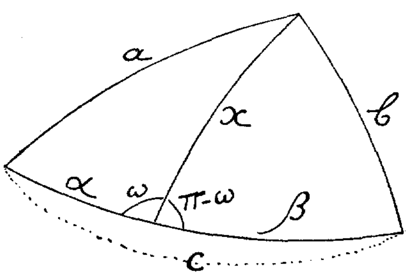

Fig. 1.

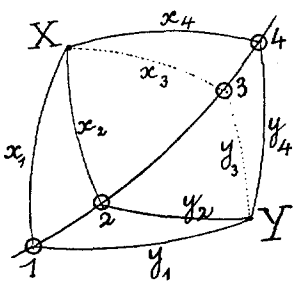

Fig. 2.

Loi de Miller.

Soient 1, 2, 3, 4 les pôles de quatre faces en zone (fig. 2), X et Y les pôles de deux axes. Dans les triangles $X14$, $Y14$, on a

$$\cos x_2 \sin \phi_{14} = \cos x_4 \sin \phi_{12} + \cos x_1 \sin \phi_{24}$$
$$\cos y_2 \sin \phi_{14} = \cos y_4 \sin \phi_{12} + \cos y_1 \sin \phi_{24},$$

et, en divisant :

$$\frac{\cos x_2}{\cos y_2} = \frac{\cos x_4 \sin \phi_{12} + \cos x_1 \sin \phi_{24}}{\cos y_4 \sin \phi_{12} + \cos y_1 \sin \phi_{24}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour introduire les caractéristiques, on a

$$\frac{a}{h_1}\cos x_1 = \frac{b}{k_1}\cos y_1, \text{ ou}$$

$$\frac{a}{b}\cos x_1 = \frac{h_1}{k_1}\cos y_1.$$

En multipliant dans l'équation (1) les numérateurs par $\frac{a}{b}$, il vient:

$$\frac{h_2}{k_2} = \frac{\frac{h_4}{k_4}\cos y_4 \sin\phi_{12} + \frac{h_1}{k_1}\cos y_1 \sin\phi_{24}}{\cos y_4 \sin\phi_{12} + \cos y_1 \sin\phi_{24}}, \text{ ou}$$

$$\cos y_4 \sin\phi_{12}\left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_4}{k_4}\right) = \cos y_1 \sin\phi_{24}\left(\frac{h_1}{k_1} - \frac{h_2}{k_2}\right),$$

$$\frac{\sin\phi_{12}}{\sin\phi_{24}} = \frac{\cos y_1}{\cos y_4}\cdot\frac{h_1k_2 - k_1h_2}{h_2k_4 - k_2h_4}\cdot\frac{k_4}{k_1}.$$

C'est une relation entre 1, 2, 4. En l'appliquant à 1, 3, 4, on obtient

$$\frac{\sin\phi_{13}}{\sin\phi_{34}} = \frac{\cos y_1}{\cos y_4}\cdot\frac{h_1k_3 - k_1h_3}{h_3k_4 - k_3h_4}\cdot\frac{k_4}{k_1}$$

et, en divisant:

$$\frac{\sin\phi_{12}\sin\phi_{34}}{\sin\phi_{13}\sin\phi_{24}} = \frac{(h_1k_2 - k_1h_2)(h_3k_4 - k_3h_4)}{(h_1k_3 - k_1h_3)(h_2k_4 - k_2h_4)}.$$